精密測定02a

測定不確かさ（1）基礎・誤差伝播

2022年5月8日

高増計測工学研究所
東京大学　名誉教授　高増潔
https://www.takamasu-lab.org/

Takamasu Lab

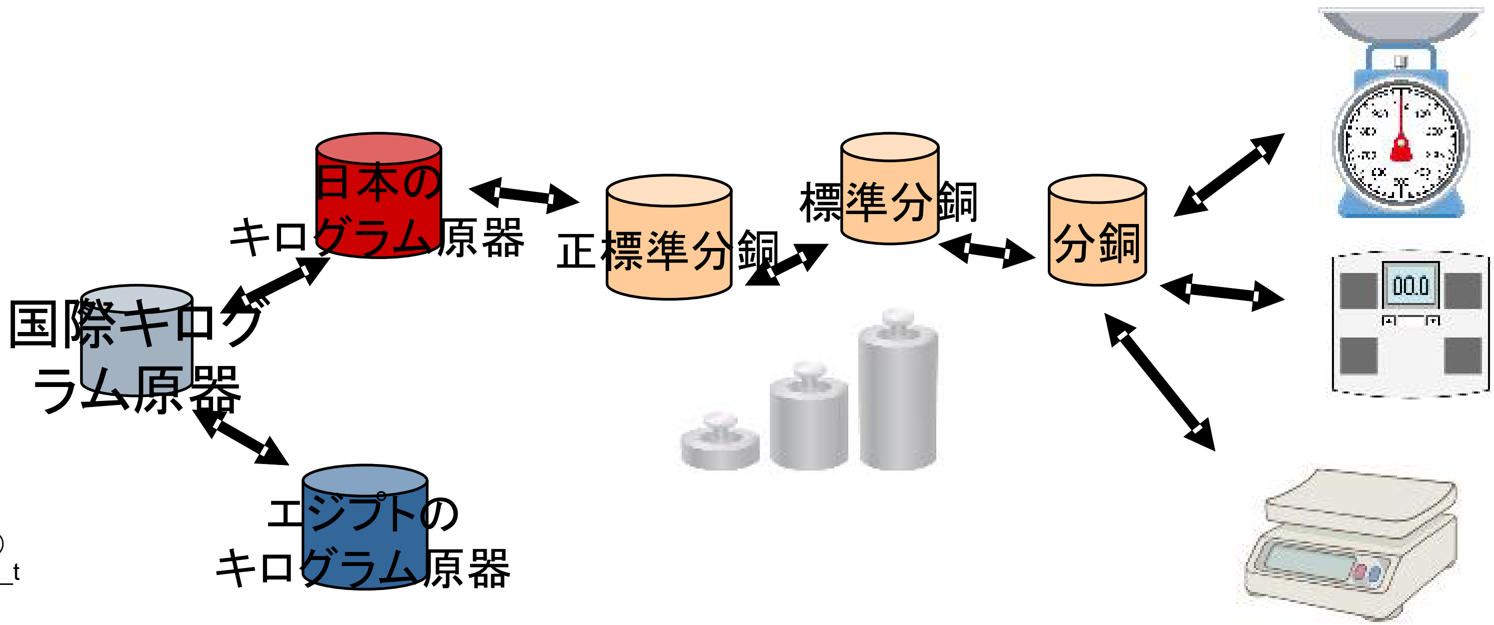
利用上の注意

- このファイルの内容，表現，図（高増潔が作成したもの：©takamasu-lab）は自由に使ってください
  - 改変，コピーなどは自由です
  - 特に許可，コピーライトの表示などは不要です
- 引用している図については，引用元の規則に従ってください
  - 講義での資料としては，自由に使えると思います
  - wikipedia関係は，パブリックドメインになっているものは自由に使えます
  - フリー素材は，フリーです
  - それ以外は，引用元の提示が必要になります
- もしも，お気づきの点，間違い，感想などがあれば，以下にメールしてください．対応するかは，状況によります．
  - takamasu@pe.t.u-tokyo.ac.jp

トレーサビリティ

- トレーサビリティ（traceability）
  - 個々の校正が測定不確かさに寄与する，文書化された切れ目のない校正の連鎖を通して，測定結果を計量参照に関連付けることができる測定結果の性質
  - 測定不確かさが重要な要素となる

国際キログラム原器（産総研）
https://www.aist.go.jp/science_town/reading/14/



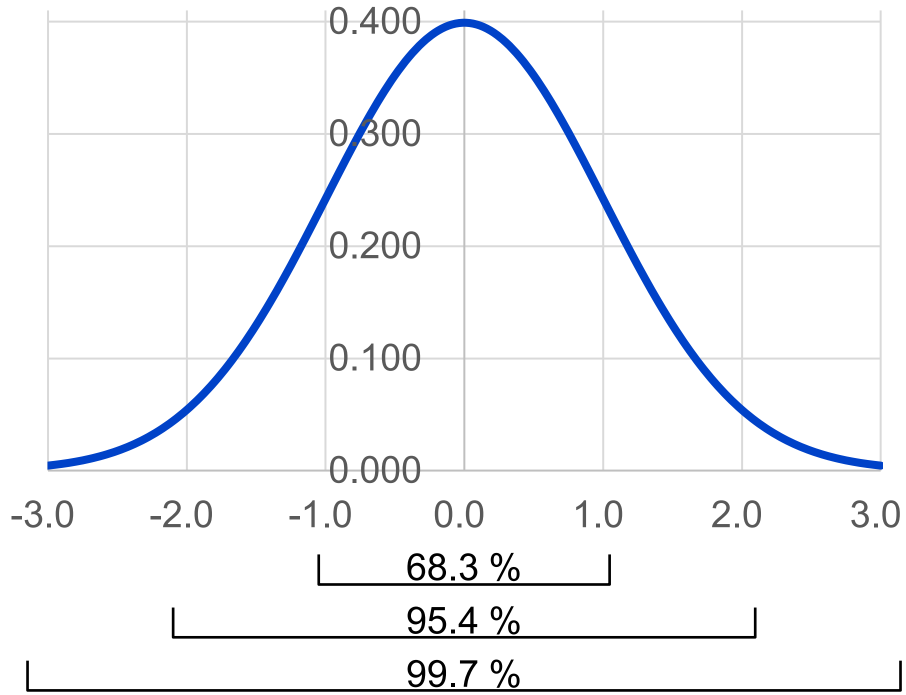
質量のトレーサビリティの図（フリー素材使用，高増潔作成©takamasu-lab）

測定不確かさ

- 測定不確かさ，測定の不確かさ（Uncertainty of Measurement）
  - 測定における不確かさの表現のガイド GUM: Guide to the expression of uncertainty in measurementで定義されている
  - 測定における不確かさの表現のガイド[GUM]ハンドブック，日本規格協会（ISO/IEC Guide 98-3の翻訳）
- 測定不確かさの定義
  - 測定の結果に付随した，合理的に測定量に結び付けられ得る値のばらつきを特徴付けるパラメータ.
    - parameter, associated with the result of a measurement, that characterizes the dispersion of the values that could reasonably be attributed to the measurand
  - 測定値が存在する95 %の範囲を統計的に評価する
    - 測定値±（標準偏差の2倍）を用いることが多い
    - 便宜的には，測定不確かさを標準偏差の2倍とする
  - 標準偏差には，偶然的な効果および系統的な効果によるばらつきを含む

測定不確かさと正規分布

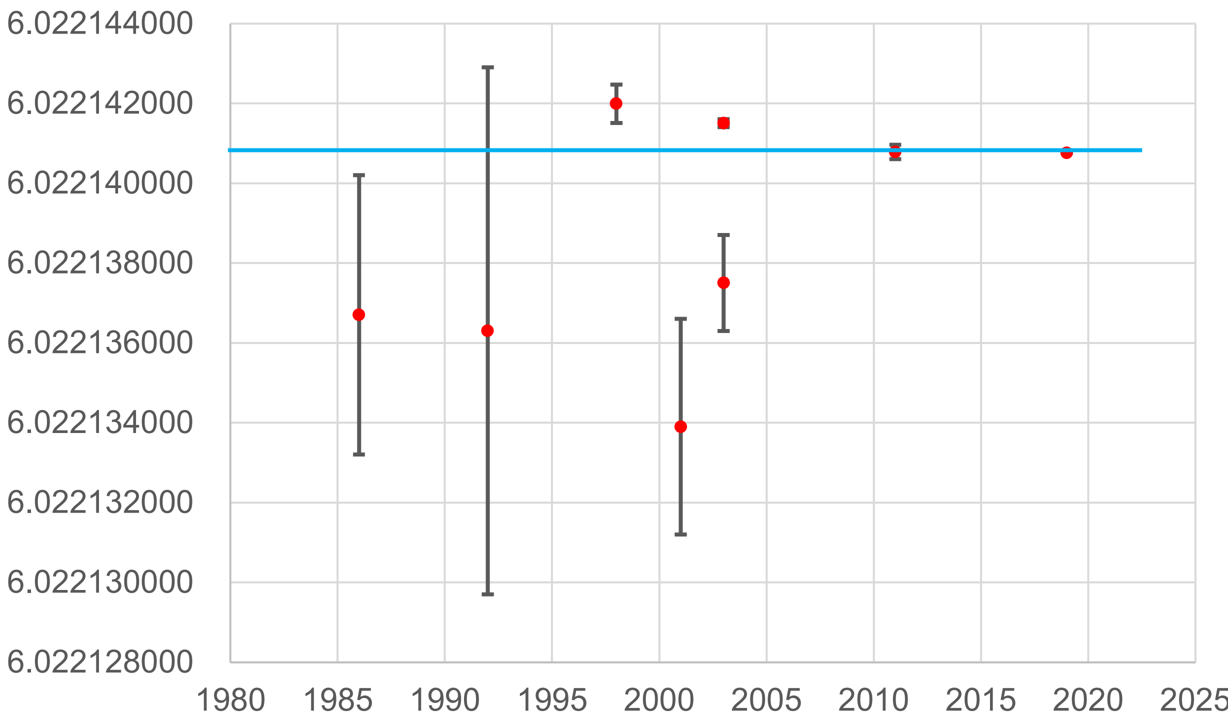
- ある測定量の真の値が存在する範囲を示す推定値（古い表現）
  - 真の値が95 %存在すると推定する範囲
  - 正規分布（ガウス分布）を仮定すると，標準偏差σに対して
    - $\pm\sigma$:　68.3 %
    - $\pm 2\sigma$:　95.4 %　→　便宜的に2σを測定不確かさとする
    - $\pm 3\sigma$:　99.7 %



正規分布：高増潔作成©takamasu-lab

真値（True Value）

- 理論的には真値は誰にも分からない．
  - 誤差＝測定値−真値：真値が分からないので，誤差も誰にも分からない
  - 実用的には，より高精度な測定によって真値に充分近い値が分かる．
- 例：アボガドロ定数の歴史的な変遷 N_A mol^{-1}
  - 測定値と不確かさの関係は，時代により矛盾している→見逃した系統的な誤差があった

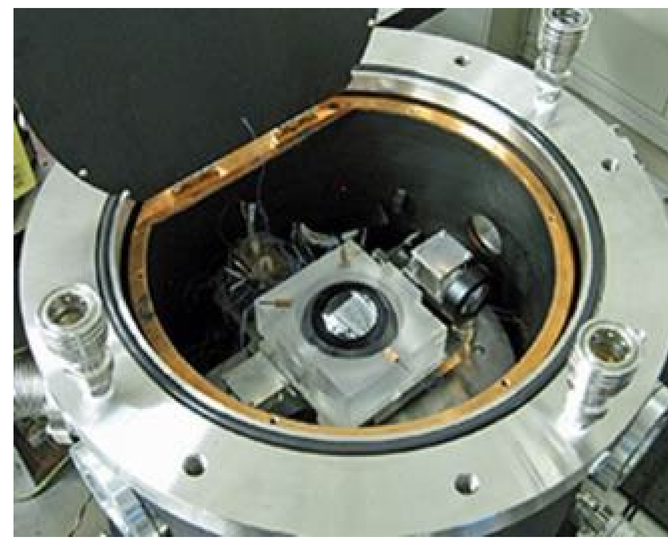


アボガドロ定数の変遷
横軸：西暦年
縦軸：アボガドロ定数×10^{23}

アボガドロ定数の変遷：日高洋：アボガドロ定数はどこまで求まっているか，ぶんせき 2, 2005, 72-76などより高増潔作成
©takamasu-lab

メモ：アボガドロ定数

- アボガドロ定数を決定する方法は興味深い
  - 日本の産総研は，Siの球の体積測定からアボガドロ定数を求める研究で世界をリードしていた
  - アボガドロ定数（現在は定数）を決定するのに大きな貢献を行った→この値がプランク定数の値，質量の定義に利用されている
  - アボガドロ定数
    $N_A = 6.02214076 \times 1023\ \mathrm{mol}^{-1}$



産総研：シリコン球の体積用レーザ干渉計
https://www.aist.go.jp/aist_j/press/photoarchives/pa20161014002.html

不確かさがないと測定値は意味がない

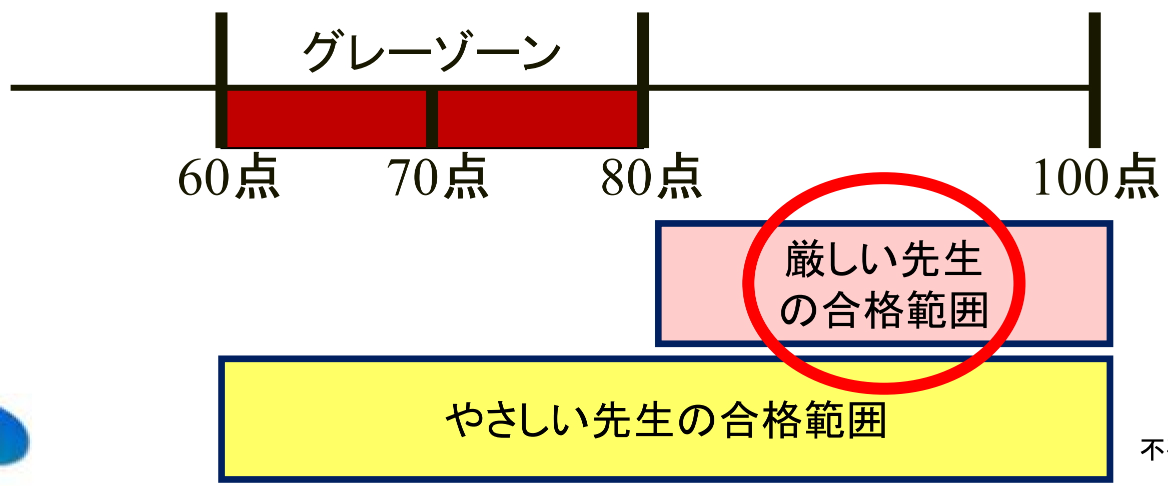
- 測定不確かさは，測定機の不確かさではない．
  - 測定機の不確かさは，測定不確かさの1つの要素である
  - いい測定機を使っても，環境が悪かったり，測定者が悪かったりすると，測定不確かさは大きくなる．
- 測定結果に不確かさがないと
  - 測定結果　10.256 mm でも，測定方法や測定者を知らないと，
  - 10.256 mm ± 0.03 mm か
  - 10.256 mm ± 0.2 mm か
  - 10.256 mm ± 5 mm か分からない
- 不確かさが分からないと，測定結果を使えない
  - 不確かさのない測定値は意味がない
  - 測定機の不確かさが分からないと，測定不確かさも分からない
    - 不確かさの分からない測定機は意味がない
    - 不確かさが分からないと，トレーサビリティは確立しないので，測定する意味がない
    - 製品の合否を決めるには不確かさが不可欠である

メモ：不確かさと有効数字

- 有効数字の考え方
  - 測定値の有効数字によって不確かさを推定する方法は，好ましくない
  - 測定値が2.54なら2.54 ± 0.01で，2.540なら2.540 ± 0.001というような解釈は，不自然で本当に測定者がその意味で使っているかが判断できない
  - 例えば，1インチの測定値を25.4 mmに変換した場合：1インチ±0.1インチなら25 mm ± 3 mmとかになり，25.4 mmとは書けなくなる
  - また，100 mm ± 10 mmなら0.1 mと表示することなり，とても不自然
  - 測定値には測定不確かさを記述することが必要
- 不確かさの桁数
  - 不確かさを何桁で表現するかは，不確かさの不確かさによって決まるはずであるが，不確かさの不確かさは普通はよく分からない
  - 一般的には，不確かさは1桁で十分であるが，1とか2の場合は結構幅が相対的に大きくなる→1だと0.95～1.49なのでいい加減すぎるようにも感じる（2だと1.5～2.49）
  - あまり深く考えても大変なので，1桁でよいとするほうが明確である→もし2桁としても2桁目はほとんど意味がないと思う方がよい
  - 桁数を合わせるとき，四捨五入か，切り上げかなども種々の方法があるが，特にこだわらなくてもよいと思う

不確かさを含んだ判断：試験の成績

- 試験の成績
  - 合格の基準：70点以上
  - 採点の不確かさ： ±10点（どのような意味か？）
- 合否の判断
  - 70点の学生も本当は50 %は不合格である（グレーゾーン）
  - やさしい判断：60点以上が合格
  - 厳しい判断：80点以上が合格
  - やさしい判断をした場合は，不合格の学生を合格にする場合がある，この責任は誰が取るのか？



不確かさと合否：高増潔作成©takamasu-lab

メモ：製品の合否判断について

- 製品の合否判断については，「精密測定02c：測定不確かさ合否判定」で説明する
- 製品の合否判定を行うには，測定不確かさが必ず必要となり，製品の合否判定を行うことが工業的な検査の目的である
- 考慮すべきことは，いくつかある
  - 不確かさの推定が正しいか
    - 不確かさが正しい不確かさより大きい場合：過大推定
    - 不確かさが正しい不確かさより小さい場合：過小推定
  - リスクと損失をどう考慮するか
    - 不合格品を合格して出荷した場合のリスクと損失
    - 合格品を不合格として廃棄した場合の損失
  - 最終的には，経済的な最適化を考える必要がある

不確かさの解析手順

- GUMに基づく，不確かさの解析手順
  - 測定・校正の手段を記述する
  - 数学モデルを構築する
    - 式を書く，要因を列挙する，実験計画法を用いる
  - 測定値を補正する
  - 不確かさの成分を分析する
    - AタイプとBタイプ，それぞれの大きさ，独立しているか
    - 各要因の不確かさu_iを標準偏差として求める
  - 合成標準不確かさの計算：二乗和平方根を求める
    - $u_\mathrm{c} = \sqrt{u_i^2}$
  - 拡張不確かさの計算（95 %の範囲）
    - $U = k\,u_\mathrm{c}$ （普通は $k = 2$）

$$u_\mathrm{c} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}$$

$$U = k u_\mathrm{c} \quad (k = 2)$$

不確かさの成分の大きさ

- Aタイプ
  - 統計的方法によって見積もる，実験によって求める（複雑な要因の場合は，実験計画法による）
  - 単純な場合は独立な測定を n 回行い，標準偏差u_iを求める（$\bar{x}$ は平均値）
  - $u_i{}^2 = \sum(x_k - \bar{x})^2/(n-1)$
- Bタイプ
  - 統計的方法以外の方法によって見積もる
  - 従来の技術情報による
    - 今までの実験データ
    - 測定試料や計測器に関する知識・経験
    - 計測器の性能，仕様
    - 校正証明書や成績書記載のデータ
    - 引用したデータや定数の不確かさ

$$u_i^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})^2$$

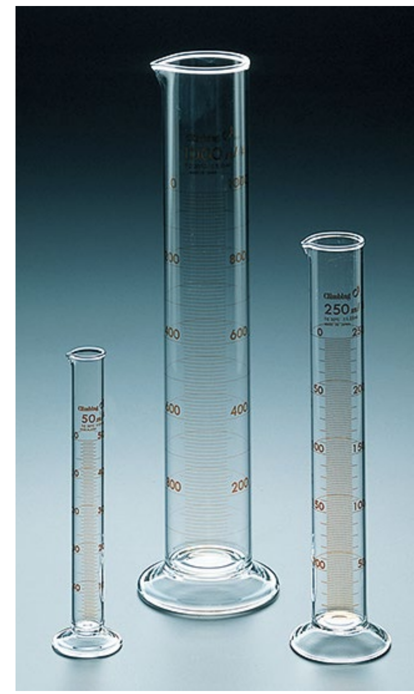
$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{k-1}^{n} x_k$$

例1：ビールジョッキ体積（1）

- ビールジョッキの体積測定
  - 線まで水を注ぎ，メスシリンダーに移して体積を測定する
  - 温度をデジタル温度計で測定し，熱膨張を補正する
  - 産総研田中秀幸氏による例を参考にした
    - 初心者向け不確かさ評価セミナー
    （https://unit.aist.go.jp/riem/ds-rg/uncertainty/club/club12-1.pdf）
- 要因
  - 繰返し：U_{R}
  - メスシリンダー：U_{S}
  - 温度：U_{T}

ビールジョッキと目盛線：ドイツでは目盛線より上までビールを注ぐ必要がある

フリー素材により高増潔作成@takamasu-lab



メスシリンダー

クライミングホームページ：https://www.climbing-web.com/product/glass_volumeter/graduatedcylinder

メモ：オクトーバーフェスト（ドイツ）

ビールジョッキと目盛線：ドイツでは目盛線より上までビールを注ぐ必要がある

フリー素材により高増潔作成@takamasu-lab

シュトゥットガルト「カンシュタット・フォルクスフェスト」の写真

高増潔撮影@takamasu-lab

ビールジョッキ体積（2）バジェットシート

■ バジェットシート（Budget Sheet）

記号	要因	値 ±	評価タイプ	分布	除数	標準 不確かさ	感度係数	標準不確かさ （測定量の単位）
u_{R}	測定の 繰り返し		A タイプ 繰り返し測定					
u_{s}	メスシリンダー の不確かさ		Bタイプ 校正証明書					
u_{T}	温度の影響		Bタイプ 理論的推定					
u_{c}	合成標準 不確かさ							
U	拡張不確かさ							

ビールジョッキ体積（3）要因の評価1：繰り返し

- u_{R}：繰り返し
  - 10回の繰り返し測定で評価
  - 実際の測定は1回の測定結果を使う
    - もし10回の測定結果の平均を使う場合は，不確かさが√10になる
  - 平均：519.8 mL，標準偏差u_{R}：2.530 mL
  - 分布：正規分布，除数：1

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{k-1}^{n} x_k$$

$$u_{\mathrm{R}}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n} (x_k - \bar{x})^2$$

n回の繰返し測定による平均値と分散

time k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_k mL	520	522	518	516	516	521	520	520	524	521

記号	要因	値 ±	評価タイプ	分布	除数	標準 不確かさ	感度係数	標準不確かさ （測定量の単位）
u_{R}	繰り返し	2.530 mL	Aタイプ	正規分布	1	2.530 mL	1	2.530 mL

メモ：繰り返しで平均を利用する場合

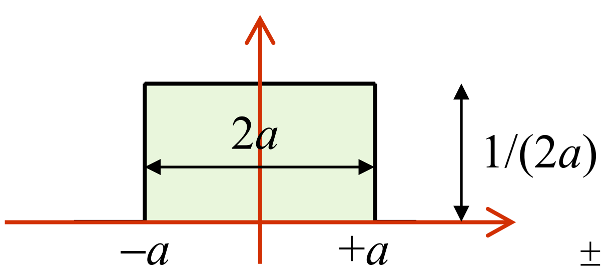
- 繰り返しの不確かさの評価
  - n回の測定によって，繰り返しの不確かさを評価する
  - 実際の測定が1回の測定で行う場合は，この値が繰り返しの不確かさとなる
  - 実際の測定がk回の測定の平均で行う場合は，この値の$\sqrt{k}$が繰り返しの不確かさとなる
- 繰り返しの不確かさは，同じ測定条件でのばらつきを評価するので，上記の方法で評価する
  - 測定条件が変わることの影響（温度条件，再現性，日による違い）は，別途評価する必要がある
  - 繰り返しだけを考えれば，短時間で測定できるシステムを作って，100万回の測定を行い平均すれば，繰り返しの不確かさは1000分の一になる→これも測定システムの戦略の一つとして考えられる

校正データの使い方

- 不確かさが書いてある場合
  - 拡張不確かさなら：kで割れば標準偏差が求まる（kのデフォルトは2）
  - 標準偏差で示す場合もある：その値が標準偏差
- 一様分布（矩形分布）を仮定する場合
  - 右の式のように標準偏差が求められる（$-a$から$+a$，範囲だと$2a$の場合）
  - 範囲で書いてある場合
    - その範囲で分布が一様なら：$2\sqrt{3}$で割る
  - 比率（%）で書いてある場合
    - 使用する値に比率をかけてから$2\sqrt{3}$で割る
  - デジタル表示の場合
    - 最小単位で一様分布として$2\sqrt{3}$で割る
    - 1度単位なら$1/(2\sqrt{3}) = 0.289$度となる

$$s^2 = \int_{-a}^{+a} \frac{1}{2a} (x-0)^2\, dx = \frac{1}{2a} \int_{-a}^{+a} x^2\, dx = \frac{1}{2a} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-a}^{+a} = \frac{a^2}{3}$$

$$s = \frac{a}{\sqrt{3}} \approx 0.58a$$



±aの範囲の一様分布

ビールジョッキ体積（4）要因の評価2：メスシリンダ

- u_s：メスシリンダの不確かさ
  - 校正証明書による
  - 拡張不確かさ：3.0 mL (k = 2)
  - 分布：正規分布
  - 除数：2

記号	要因	値 ±	評価タイプ	分布	除数	標準不確かさ	感度係数	標準不確かさ（測定量の単位）
u_s	メスシリンダーの不確かさ	3.0 mL	Bタイプ	正規分布	2	1.5 mL	1	1.5 mL

ビールジョッキ体積（5）要因の評価3：温度

- u_T: 温度の影響
  - デジタル温度計の分解能：1 ºC
    - 値： ±0.5 ºC，分布：一様分布
    - 除数：√3
  - 感度係数
    - 水の体膨張係数：2.1×10^{-4} (ºC^{-1}) （ガラスの体膨張は小さい）
    - 体積：520.8 mL
    - 感度係数：$2.1 \times 10^{-4} \times$ 520.8 mL = 0.109 (mL/ºC)
  - 標準不確かさ（測定量の単位）
    - 0.289 ºC × 0.109 mL/ºC = 0.033 mL

記号	要因	値 ±	評価タイプ	分布	除数	標準不確かさ	感度係数	標準不確かさ（測定量の単位）
u_T	温度の影響	0.5 ºC	Bタイプ	一様分布	√3	0.289 ºC	0.109 mL/ºC	0.033 mL

ビールジョッキ体積（6）バジェットシート

- u_c：合成標準不確かさ（各要因の二乗和平方根）：2.94 mL
- U：拡張不確かさ（$2u_c$）：6 mL
  - 測定結果（例）：522 mL ± 6 mL

記号	要因	値 ±	評価タイプ	分布	除数	標準 不確かさ	感度係数	標準不確かさ （測定量の単位）
u_R	測定の 繰り返し	2.530 mL	Aタイプ	正規分布	1	2.530 mL	1	2.530 mL
u_s	メスシリンダーの不確かさ	3.0 mL	Bタイプ	正規分布	2	1.5 mL	1	1.5 mL
u_T	温度の影響	0.5 deg	Bタイプ	一様分布	√3	0.289 deg	0.109 mL/deg	0.033 mL
u_c	合成標準 不確かさ			正規分布				2.94 mL
U	拡張不確かさ			正規分布				6 mL

二乗和平方根：Root Sum Square (RSS)

- 二乗和平方根（RSS）

$$u_{\mathrm{RSS}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$$

$$u_{\mathrm{RSS}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

- 二乗和平方根の効果
  - 最大要因の50 %以下の要因は，RSSの値に10 %以下しか寄与しない
  - 大きい要因だけを考慮すればよい

u_1	u_2	u_{RSS}
1.0	1.0	1.414
1.0	0.9	1.345
1.0	0.8	1.281
1.0	0.7	1.221
1.0	0.6	1.166
1.0	0.5	1.112
1.0	0.4	1.077
1.0	0.3	1.044
1.0	0.2	1.020
1.0	0.1	1.005

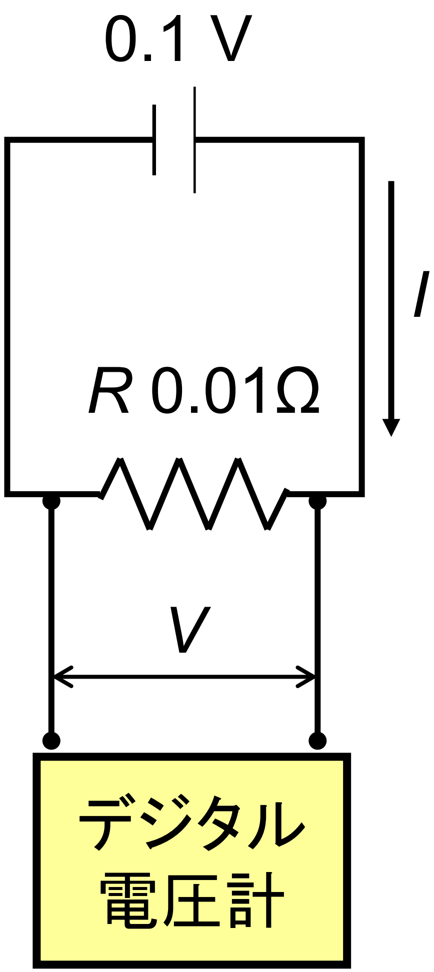
メモ：ビールジョッキの体積の不確かさ

- 単純な不確かさの解析例として使用
  - 不確かさ要因として以下の3つは考慮すべき
    - 繰り返し
    - 使用した測定機器
    - 環境（温度など）
  - バジェットシートを見て考察する
    - どうしたら不確かさを減らせるか→繰り返しが大きいので繰り返しを減らすように方法を考える→例えば：目で見ずにカメラで見る，n回測定して平均を取る（平均を取ると繰り返しは$1/\sqrt{n}$となる
    - 不確かさを増やしてもよい場合はどうするか→例えば：温度補正をやめる，もっと精度の低いメスシリンダーを使う
    - 温度補正をしない場合は，基準温度からの平均的な偏差から不確かさを推定する

例2：電流測定（1）

- 測定回路
  - 電流I（約10 A）を抵抗R（公称0.01 Ω：測定値0.01018 Ω）に流し，電圧降下Vをデジタル電圧計（DVM）で測定する
    - 「計測の信頼性評価，今井秀孝，日本規格協会」の例を基にしている
    - 誤差伝播で計算する例
  - 測定量と入力量の関係

    $I = V / R$
  - 不確かさ要因
    - 繰返し，DVM，抵抗，温度
    - DVMの入力抵抗は10^9 Ω以上，漏れ電流の補正は無視できる．



電流測定（2）

- タイプAの不確かさ
  - 測定の繰り返しの不確かさ $u_{R,}$ 10回の測定でVの平均値と標準偏差を評価（電圧として）
    - 平均： 100.21 mV
    - 標準偏差： 0.036 mV

time k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_k mV	100.28	100.23	100.18	100.20	100.23	100.18	100.17	100.25	100.22	100.19

電流測定（3）

- タイプBの不確かさ
  - それぞれの値（電圧，抵抗）として標準偏差を評価
  - DVMの誤差（メーカの仕様） u_{DVM}
    - 100 mVで0.045 %なので，矩形分布を仮定して
    - 標準偏差：$100 \times 0.045 / 100 / \sqrt{3} = 0.026$ mV
  - 抵抗器Rの校正値（購入時の校正表） u_{Reg}
    - 測定の相対不確かさが $10 \times 10^{-4}\ \Omega$（$k = 2$）なので
    - 標準偏差：$0.01 \times (1/2) \times 10 \times 10^{-4} = 5\ \mu\Omega$
  - 温度の影響 u_{Temp}
    - DVMは補正されている
    - 抵抗器の温度による変化は無視できる

電流測定（4）

- 前記の標準偏差は，電圧，抵抗での値なので，測定値（電流）での標準偏差へ変換する必要がある
  - この変換には，誤差伝播（不確かさの伝播）の考え方を利用する →詳細は誤差の伝播に示す
  - 偏微分係数の計算によって変換する
    - 電圧から電流への変換の偏微分係数
      $\partial I / \partial V = 1 / R = 100$ A/V
    - 抵抗から電流への変換の偏微分係数
      $\partial I / \partial R = V / R^2 = 1000$ A/Ω
- 測定値（A）での標準偏差
  - 測定の繰り返しの不確かさ u_{R}
    0.036 mV × 100 A/V = 0.0036 A
  - DVMの誤差による不確かさ u_{DVM}
    0.026 mV × 100 A/V = 0.0026 A
  - 抵抗器Rの校正値による不確かさ u_{Reg}
    5 μΩ × 1000 A/Ω ＝0.005 A

$$I = \frac{V}{R}$$

$$\frac{\partial I}{\partial V} = \frac{1}{R}$$

$$\frac{\partial I}{\partial R} = \frac{V}{R^2}$$

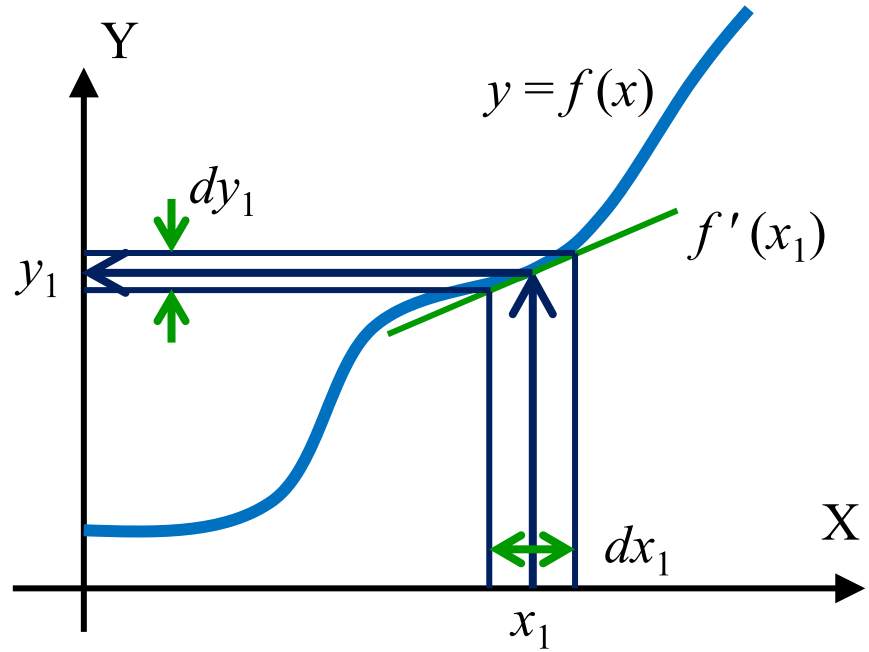
電流測定（4）：バジェットシート

- u_c：合成標準不確かさ：0.0067 A
- U：拡張不確かさ：0.013 A
- 測定結果（例）：9.985 A ± 0.013 A

記号	要因	値 ±	評価タイプ	分布	除数	標準不確かさ	感度係数	標準不確かさ（測定量の単位）
u_R	繰り返し	0.036 mV	A タイプ	正規分布	1	0.036 mV	100 A/V	0.0036 A
u_{DVM}	DVM	0.045 mV	Bタイプ	一様分布	√3	0.026 mV	100 A/V	0.0026 A
u_{Reg}	抵抗器	10 μΩ	Bタイプ	正規分布	2	5 μΩ	1000 A/Ω	0.005 A
u_c	合成標準不確かさ			正規分布				0.0067 A
U	拡張不確かさ			正規分布				0.013 A

誤差の伝播（1）

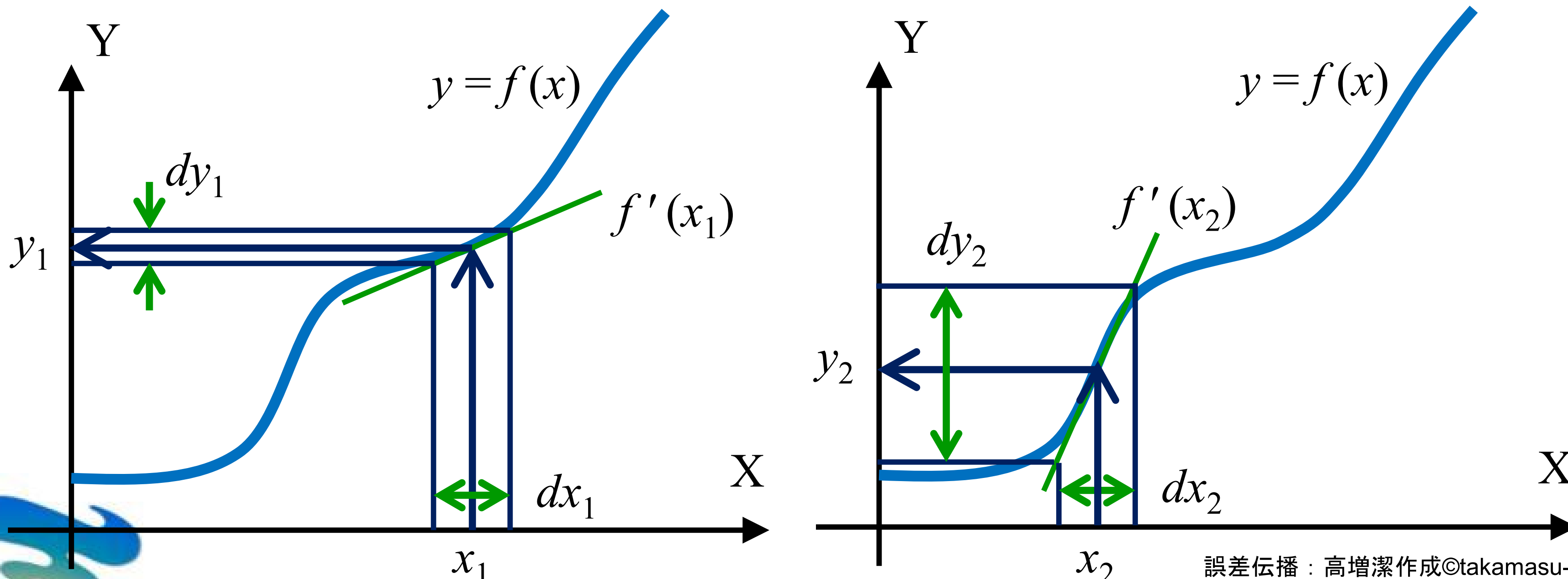
- 測定モデルの関係
  - パラメータ x と測定結果 y の関係：$y = f(x)$
  - パラメータが x_1 のときの誤差 dx_1 は，測定結果 y_1 に対して dy_1 の誤差となる
    - この時の関係は，x_1 における偏微分係数 $f'(x_1)$ によって以下の関係となる
    - $dy_1 = f'(x_1)\, dx_1$



誤差伝播：高増潔作成©takamasu-lab

メモ：パラメータ設定とロバスト設計

- パラメータ x と測定結果 y の関係：$y=f(x)$
  - パラメータが x_1，x_2 のときの誤差 dx_1 と dx_2 が等しい
  - 測定結果 y_1 に対して dy_1 の誤差（左図）と測定結果 y_2 に対して dy_2 の誤差（右図）は等しくならない：偏微分係数に依存する
- ロバスト設計
  - 誤差の影響が少なくなるように設計するには，パラメータが x_1 の位置になるように設計するとよい



誤差伝播：高増潔作成©takamasu-lab

誤差の伝播（2）

- 誤差とその分散
  - 誤差は正負により打ち消しあったりする.
  - 分散（標準偏差の二乗）はそれぞれの誤差の二乗和で計算できる.
    - 互いに独立な場合
    - 独立でない場合は共分散を考慮する必要がある→一般的には考慮するのは難しいので考慮しない場合が多い

$$y = f(x_1, x_2, x_3, \dots)$$

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3 + \cdots$$

$$s_y^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 s_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 s_{x_2}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)^2 s_{x_3}^2 + \cdots$$

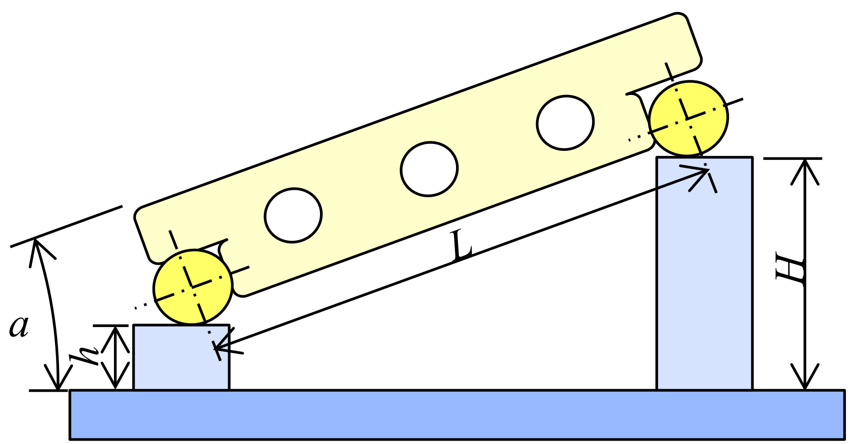
$$s_y = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 s_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 s_{x_2}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)^2 s_{x_3}^2 + \cdots}$$

誤差の伝播（3）

- 誤差伝播の例
  - 誤差 3 μm と誤差 4 μm のブロックゲージを2つくっつけると
    - 誤差は 5 μm = $\sqrt{3^2+4^2}$

$$L = L_1 + L_2$$
$$s^2 = s_1^2 + s_2^2$$

  - サインバー：誤差伝播の例としてよく使われていた
    - 2つのブロックゲージ組の上に，サインバーを載せて角度aを作る，角度aとブロックゲージの差Eの関係がサインになっている
    - サインバーの距離Lの誤差とs_Lブロックゲージの差Eの誤差s_Eと角度aの誤差s_aの関係が誤差伝播で求められる



$$L \sin a = H - h = E$$

$$a = f(E, L) = \arcsin\left(\frac{E}{L}\right)$$

$$s_a^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial E}\right)^2 s_E^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial L}\right)^2 s_L^2$$

サインバー：高増潔作成©takamasu-lab

誤差の伝播（4）

- サインバーの誤差
  - JIS B7523　サインバー
    総合精度（1級）は30ºで40 μrad
  - E と L の誤差比が定数の場合，$\tan a$ に比例して誤差が大きくなる
  - a が45º以下で使うことが望ましい

$$y = \arcsin x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos y} = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

逆関数の微分：arcsin x

サインバーの誤差s_aの計算

$$s_a = \sqrt{\left(\frac{s_E}{E}\right)^2 + \left(\frac{s_L}{L}\right)^2} \tan a$$
$$= A \tan a$$

$$s_a^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial E}\right)^2 s_E^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial L}\right)^2 s_L^2$$
$$= \left(\frac{\partial arcsin\left(\frac{E}{L}\right)}{\partial E}\right)^2 s_E^2 + \left(\frac{\partial arcsin\left(\frac{E}{L}\right)}{\partial L}\right)^2 s_L^2$$
$$= \left(\frac{1}{L\cos a}\right)^2 s_E^2 + \left(\frac{E}{L^2 \cos a}\right)^2 s_L^2$$
$$= \left(\frac{\sin a}{E\cos a}\right)^2 s_E^2 + \left(\frac{\sin a}{L\cos a}\right)^2 s_L^2$$

誤差の伝播（5）

- 積で表されるとき
  - 測定値 y が n 個の測定値 x_1, x_2 …, x_n のべき乗の積で表されるとき
  - それぞれの測定値の誤差の標準偏差 s_{x1}, s_{x2} … s_{xn} とし
  - べき乗を p_1, p_2…, p_n とする
  - この場合も，誤差の率で表現すると分かりやすい

$$y = x_1^{p_1} \cdot x_2^{p_2} \ldots x_n^{p_n}$$

$$\begin{aligned}
s_y^2 &= \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 s_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 s_{x_2}^2 + \cdots \\
&= \left(p_1 x_1^{p_1-1} \cdot x_2^{p_2} \cdots x_n^{p_n}\right)^2 s_{x_1}^2 \\
&+ \left(x_1^{p_1} \cdot p_2 x_2^{p_2-1} \cdots x_n^{p_n}\right)^2 s_{x_2}^2 + \cdots \\
&= \left(\frac{p_1 y}{x_1}\right)^2 s_{x_1}^2 + \left(\frac{p_2 y}{x_2}\right)^2 s_{x_2}^2 + \cdots
\end{aligned}$$

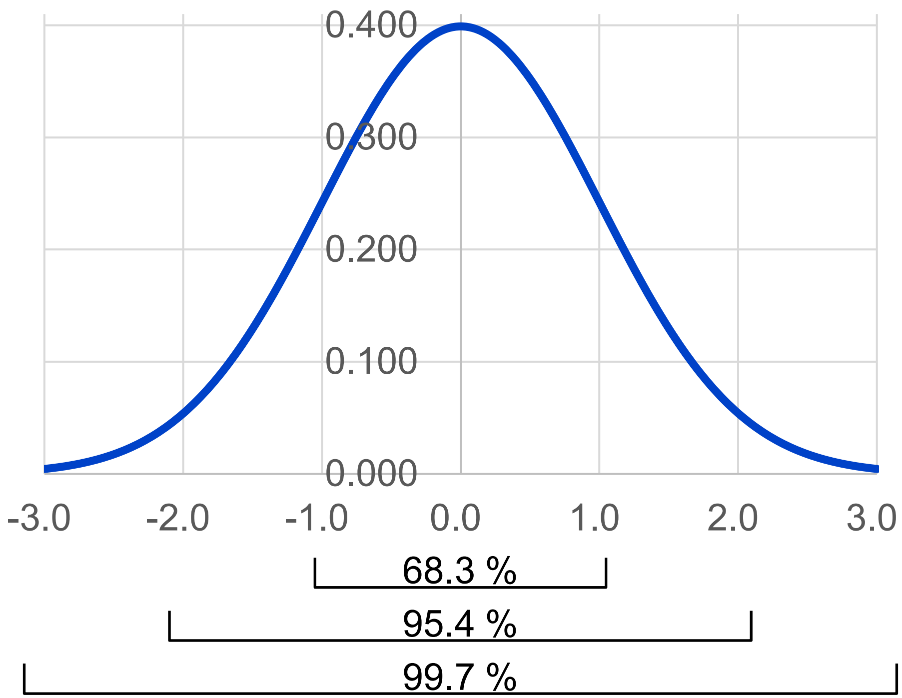
$$\frac{s_y}{y} = \sqrt{p_1^2\left(\frac{s_{x_1}}{x_1}\right)^2 + p_2^2\left(\frac{s_{x_2}}{x_2}\right)^2 + \cdots}$$

まとめ：不確かさの基礎と誤差伝播

- 不確かさを計算する例として，ビールジョッキと電流の2つを示した
  - ビールジョッキでは，基本的な計算例を示した
  - 電流では，誤差伝播の計算の仕方を示した
- 誤差伝播では，偏微分による誤差の変換を説明した
  - この考え方は重要で，多くの測定の誤差解析に利用される

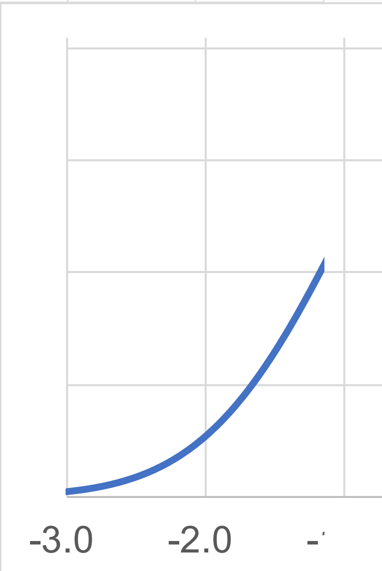
メモ作画：正規分布

- 正規分布
  - 平均0，標準偏差1



正規分布のグラフ
2022年5月10日　高増潔
平均0，標準偏差1

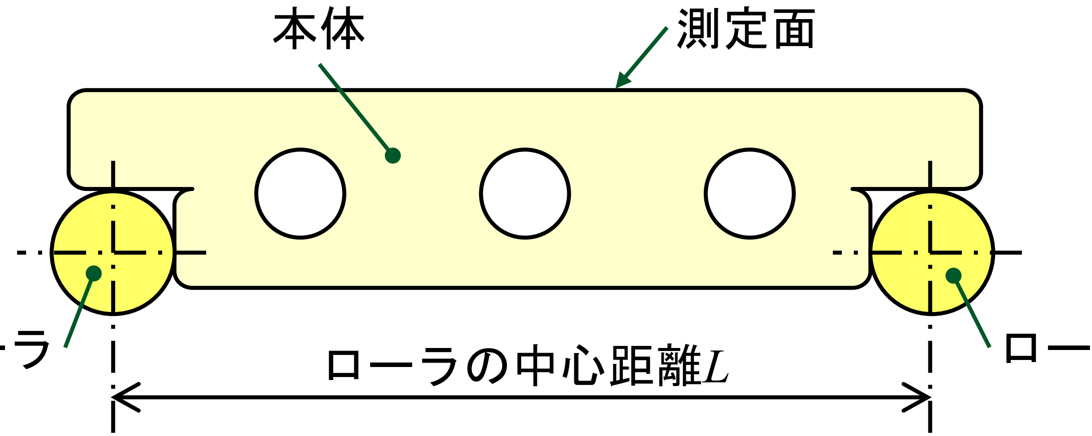
x	正規分布
−3.0	0.004
−2.9	0.006
−2.8	0.008
−2.7	0.010
−2.6	0.014
−2.5	0.018
−2.4	0.022
−2.3	0.028
−2.2	0.035
−2.1	0.044
−2.0	0.054
−1.9	0.066
−1.8	0.079
−1.7	0.094
−1.6	0.111
−1.5	0.130
−1.4	0.150
−1.3	0.171
−1.2	0.194
−1.1	0.218



正規分布：高増潔作成©takamasu-lab

メモ作画：サインバー

サインバー，大菱計器製作所ホームページ
https://www.obishi.co.jp/catalog/angle-plates/661/



サインバー：高増潔作成©takamasu-lab