

精密測定02b

測定不確かさ（2）長さ測定・温度の影響

2022年5月8日

高増計測工学研究所

東京大学 名誉教授 高増潔

<https://www.takamasu-lab.org/>



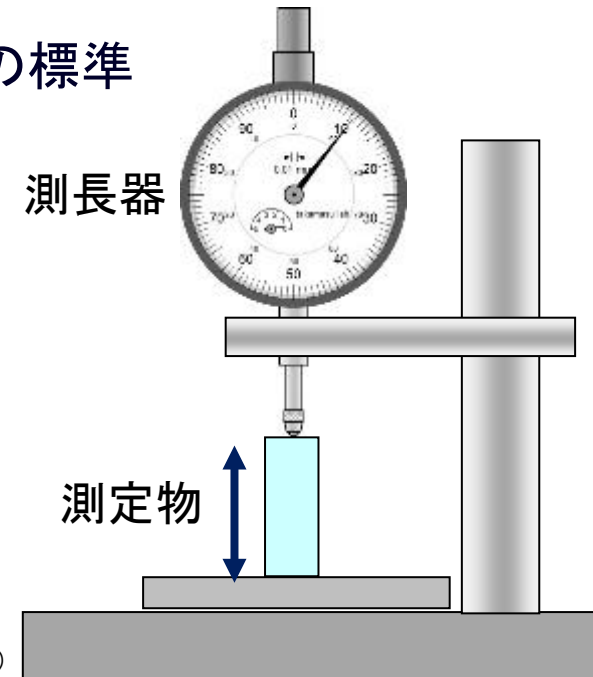
利用上の注意

- このファイルの内容，表現，図（高増潔が作成したもの：
©takamasu-lab）は自由に使ってください
 - 改変，コピーなどは自由です
 - 特に許可，コピーライトの表示などは不要です
- 引用している図については，引用元の規則に従ってください
 - 講義での資料としては，自由に使えると思います
 - wikipedia関係は，パブリックドメインになっているものは自由に使えます
 - フリー素材は，フリーです
 - それ以外は，引用元の提示が必要になります
- もしも，お気づきの点，間違い，感想などがあれば，以下にメールしてください．対応するかは，状況によります．
 - takamasu@pe.t.u-tokyo.ac.jp



例3：寸法測定（1）

- ブロックの寸法測定
 - アッベの原理に基づく配置で，鋼製ブロック（約500 mm）の寸法を測定する．
 - 測長器の精度は $3\text{ }\mu\text{m}$ （ $k=2$ ），温度をデジタル温度計（ $1\text{ }^{\circ}\text{C}$ 読み）で測定し，熱膨張を補正する．
- 要因として不可欠なもの
 - 繰り返し
 - 測定機器およびその校正，比較測定の場合の標準
 - 環境，特に温度
- 不確かさ要因
 - 繰り返し： u_R
 - 測長器： u_S
 - 温度： u_T



寸法測定，高増潔作成©takamasu-lab)



寸法測定（2）バジェットシート

■ バジェットシート（Budget Sheet）

記号	要因	値 ±	評価タイプ	分布	除数	標準 不確かさ	感度係数	標準不確かさ (測定量の単位)
u_R	測定の 繰り返し		Aタイプ 繰り返し測定					
u_s	測長器 の不確かさ		Bタイプ 校正証明書					
u_T	温度の影響		Bタイプ 理論的推定					
u_c	合成標準 不確かさ							
U	拡張不確かさ							



寸法測定（3） 要因の評価1：繰り返し

- u_R ：繰り返し
 - 10回の繰り返し測定を行う
 - 平均：500.0025 mm
 - 標準偏差：4.50 μm
 - 分布：正規分布，除数：1
 - 測長器の繰返しによる不確かさ（測定量の単位）
 - $u_R = 4.5 \mu\text{m}$

繰り返し	1	2	3	4	5
mm	499.9974	500.0031	499.9974	500.0012	500.0069
	6	7	8	9	10
mm	500.0067	499.9991	500.0103	499.9987	500.0045

記号	要因	値 ±	評価タイプ	分布	除数	標準 不確かさ	感度係数	標準不確かさ (測定量の単位)
u_R	繰り返し	4.5 μm	Aタイプ	正規分布	1	4.5 μm	1	4.5 μm

寸法測定（４）要因の評価２：測長器の不確かさ

- u_s ：測長器の不確かさ
 - 校正証明書による
 - 拡張不確かさ： $3.0\text{ }\mu\text{m}$ ($k=2$)
 - 分布：正規分布，除数：2
 - 測長器による不確かさによる標準不確かさ（測定量の単位）
 - $3.0\text{ }\mu\text{m} / 2 = 1.5\text{ }\mu\text{m}$

記号	要因	値 ±	評価タイプ	分布	除数	標準 不確かさ	感度係数	標準不確かさ (測定量の単位)
u_s	測定器 の不確かさ	$3.0\text{ }\mu\text{m}$	Bタイプ	正規分布	2	$1.5\text{ }\mu\text{m}$	1	$1.5\text{ }\mu\text{m}$



寸法測定（5）要因の評価3：温度の影響

■ u_T : 温度の影響

- 温度をデジタル温度計で測定し，測定した長さを20℃における長さに熱膨張係数により変換する→測定器は自動的に温度影響しているので影響は無視する，熱膨張係数は正しく分かっている
- デジタル温度計の分解能：1℃
 - 値： $\pm 0.5^\circ\text{C}$ ，分布：一様分布，除数： $\sqrt{3}$
- 感度係数
 - 鉄の線膨張係数： $10 \times 10^{-6} (\text{deg}^{-1})$ ，長さ：500 mm
 - 感度係数： $10 \times 10^{-6} \times 500 \text{ mm} = 5 (\mu\text{m}/\text{deg})$
- 温度測定の不確かさによる標準不確かさ（測定量の単位）
 - $0.289 \text{ deg} \times 5 \mu\text{m}/\text{deg} = 1.45 \mu\text{m}$

記号	要因	値 ±	評価タイプ	分布	除数	標準 不確かさ	感度係数	標準不確かさ (測定量の単位)
u_T	温度の影響	0.5 deg	Bタイプ	一様分布	$\sqrt{3}$	0.289 deg	5 $\mu\text{m}/\text{deg}$	1.45 μm

寸法測定（6） バジエットシート：完成

■ 合成標準不確かさと拡張不確かさの計算

■ 合成標準不確かさ： $u_c = 4.96 \mu\text{m}$

■ 拡張不確かさ： $U = 10 \mu\text{m}$

■ 結果：例えば $499.99 \text{ mm} \pm 0.01 \text{ mm}$

記号	要因	値 ±	評価タイプ	分布	除数	標準 不確かさ	感度 係数	標準不確かさ (測定量の単位)
u_R	測定の 繰り返し	4.5 μm	Aタイプ	正規分布	1	4.5 μm	1	4.5 μm
u_s	測定器 の不確かさ	3.0 μm	Bタイプ	正規分布	2	1.5 μm	1	1.5 μm
u_T	温度の影響	0.5 deg	Bタイプ	一様分布	$\sqrt{3}$	0.289 deg	5 $\mu\text{m}/\text{deg}$	1.45 μm
u_c	合成標準 不確かさ			正規分布				4.96 μm
U	拡張不確かさ			正規分布				9.92 μm



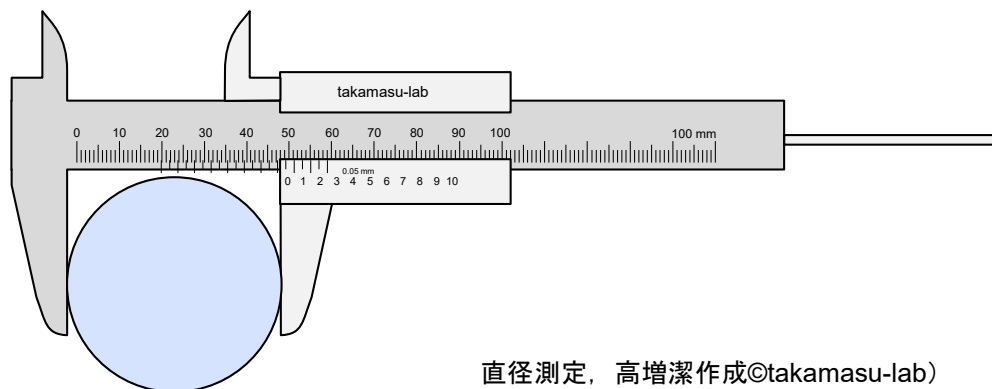
例4：ノギスによる測定の不確かさ（1）

■ 測定条件

- 測定最大長が 150 mm，最小表示値が 0.05 mm のノギスで，公称値の直径50 mm の黄銅製円柱を測定．
- 簡易空調の部屋で測定する，ノギスとワークは温度ならしする

■ 不確かさの要因

- ノギスの不確かさ（Bタイプ：仕様から）
 - 器差 ± 0.05 mmを一様分布とみなすと，標準不確かさは， $0.05 / \sqrt{3} = 0.029$ mmとなる．
- 温度の影響による不確かさ（Bタイプ：式から計算）
 - 普通の環境では，0.001 mm以下で影響しない
- ノギスの目盛の読取りによる不確かさ（Aタイプ：実験から）
 - 0.015 mm



直径測定，高増潔作成©takamasu-lab)



ノギスによる測定の不確かさ (2) バジレットシート

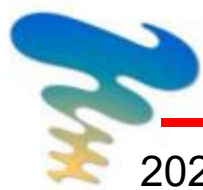
■ 合成標準不確かさと拡張不確かさの計算

■ 合成標準不確かさ : $u_c = 0.033 \text{ mm}$

■ 拡張不確かさ : $U = 0.07 \text{ mm}$

■ 結果 : 例えば $50.05 \text{ mm} \pm 0.07 \text{ mm}$

記号	要因	値 ±	評価 タイプ	分布	除数	標準 不確かさ	感度 係数	標準不確かさ (測定量の単位)
u_s	ノギス	0.05 mm	B : 仕様	一様	$\sqrt{3}$	0.029 mm	1	0.029 mm
u_T	温度		B : 計算	正規				無視できる
u_R	繰り返し	0.015 mm	A : 実験	正規	1	0.015 mm	1	0.015 mm
u_c	合成標準 不確かさ			正規				0.033 mm
U	拡張 不確かさ			正規				0.066 mm



温度環境の影響（１）：温度補正

■ 温度の影響

- 測定物の寸法はJIS B0680によって、20 °C（基準温度）における寸法と定義されている

■ スケール（scale）

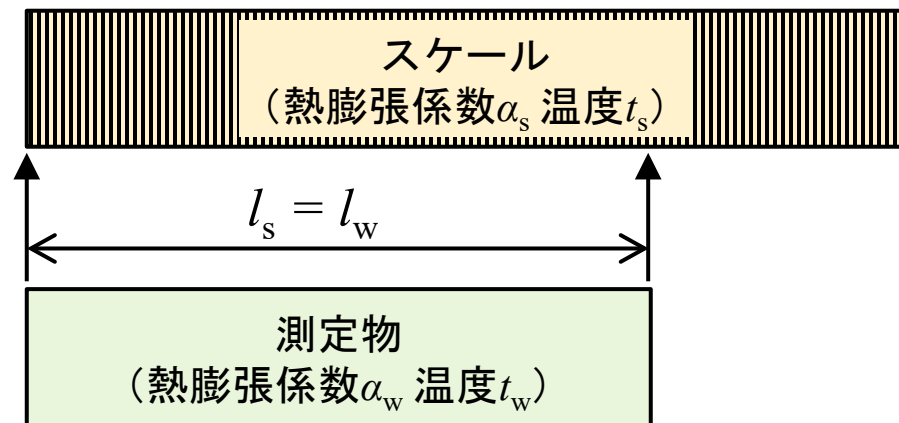
- 読み l_{s20}
- 熱膨張係数 α_s 温度 t_s
- 温度 t_s での寸法 l_s

■ 測定物（work）

- 定義寸法 l_{w20}
- 熱膨張係数 α_w 温度 t_w
- 温度 t_w での寸法 l_w

- 測定では： $l_s = l_w$

- 求めたいのは： l_{w20}
（一番下の式）



温度補正，高増潔作成©takamasu-lab)

$$l_s = l_{s20}(1 + \alpha_s(t_s - 20))$$

$$l_w = l_{w20}(1 + \alpha_w(t_w - 20))$$

$$l_{w20} = \frac{l_{s20}(1 + \alpha_s(t_s - 20))}{1 + \alpha_w(t_w - 20)}$$



温度環境の影響（２）：温度補正（２）

■ 温度補正が不要な条件

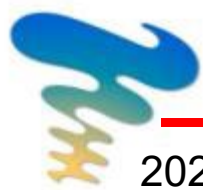
- 温度補正の式を変形した一番下の式→分母を分子に移した式は、理解しやすい
- 測定値 l_{s20} と測定したい寸法 l_{w20} が等しい条件（温度補正が不要な条件）は、以下のようなものがある
 - 温度が $20\text{ }^{\circ}\text{C}$: $t_s = t_w = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$
 - 温度と熱膨張係数が等しい : $t_s = t_w$ かつ $\alpha_s = \alpha_w$
 - 熱膨張係数が 0 : $\alpha_s = \alpha_w = 0$
- 従来の高精度な測定は、鉄の測定物を鉄のスケールで測定していたので、温度補正はそれほど重要ではなかった→現在では、種々の材料を高精度に測定するのでとても重要
 - 工作機械でも、鉄の工作機械で鉄を削る場合は、温度補正はそれほど重要でない→今後は重要度が増す

$$l_{w20} = \frac{l_{s20}(1 + \alpha_s(t_s - 20))}{1 + \alpha_w(t_w - 20)}$$
$$\approx l_{s20}(1 + \alpha_s(t_s - 20) - \alpha_w(t_w - 20))$$



温度環境の影響（3）：標準温度

- 測定物の寸法はJIS B0680によって、20 °C（標準温度）における寸法と定義されている
 - 一般的な製造物，図面，カタログ，仕様での寸法は20 °Cでの値になっている
 - 測定機器は，20 °Cで正しい寸法が測定できるようにスケールが作られている
 - 他の性能（電気的な性能，質量，力など）の標準温度は23 °Cなどとなっているのに注意が必要→「JIS Z8703 試験場所の標準状態」では，温度は20 °C，23 °C，25 °Cで推奨は23 °Cとなっている



温度環境の影響（４）：温度補正の不確かさ

■ 温度補正の不確かさ

■ 温度測定の不確かさと熱膨張係数の不確かさによる

- 温度測定の不確かさ：温度計と環境（温度の均一性，温度ドリフト）に依存
- 熱膨張係数の不確かさ：一般的な材料の熱膨張係数は大きな不確かさを持つ，鉄では10 %くらいある，プラスチックなどはもっと大きい→熱膨張係数の測定方法は興味深い

■ 温度補正の不確かさの計算例：

■ $t_w = 25\text{ }^{\circ}\text{C}$ で $l_w = 100\text{ mm}$ の鋼製の測定物の寸法測定をする場合

- 温度測定の不確かさ $d_{tw} : 0.1\text{ }^{\circ}\text{C} \rightarrow t_w = 25\text{ }^{\circ}\text{C} \pm 0.1\text{ }^{\circ}\text{C}$
 - 温度測定の不確かさによる寸法測定の不確かさ
$$l_w \times \alpha_w \times d_{tw} = 100\text{ mm} \times 10 \times 10^{-6} \times 0.1 = 0.1\text{ }\mu\text{m}$$
- 熱膨張係数の不確かさ $d_{\alpha w} : 1 \times 10^{-6} \rightarrow \alpha_w = 10 \times 10^{-6} \pm 1 \times 10^{-6}$
 - 熱膨張係数の不確かさによる寸法測定の不確かさ
$$l_w \times d_{\alpha w} \times (t_w - 20) = 100\text{ mm} \times 1 \times 10^{-6} \times (25 - 20) = 0.5\text{ }\mu\text{m}$$



温度環境の影響（5）：温度補正の不確かさ

■ 温度補正の不確かさ

- 下の式は、誤差伝播で測定物の温度補正の不確かさを求めた→前のページの例もこの式による
- 実際には、測定物だけでなくスケールも温度補正を行うため、測定物とスケールの**温度の差**および**熱膨張係数の差**によって計算することになる→この例は検討中
- 温度測定の不確かさ d_{tw} ：よい環境により温度計を用意することで影響を少なくできる
- 熱膨張係数の不確かさ $d_{\alpha w}$ ：材料によって大きい（減らせない）ので、 $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ に近い温度（ $t_w - 20$ を小さくする）で測定することが必要になる→恒温室が必要になる

$$l_{w20} = l_{s20}(1 - \alpha_w(t_w - 20))$$
$$(d_{l_{w20}})^2 = (l_{s20}\alpha_w d_{tw})^2 + (l_{s20}(t_w - 20)d_{\alpha w})^2$$
$$d_{l_{w20}} = l_{s20}\sqrt{(\alpha_w d_{tw})^2 + ((t_w - 20)d_{\alpha w})^2}$$



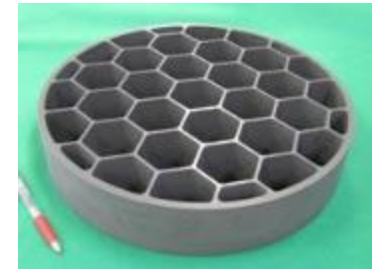
メモ：材料の熱膨張率

■ 熱膨張率（線熱膨張係数）

- 機械的な計測では、スケールやアーティファクトの寸法を利用するので、熱膨張の影響を直接受ける
- CTE (coefficient of thermal expansion) : 1°C (1 K) あたりの膨張率：単位 1°C ($1/\text{K}$)
- 固体のCTE：単位 1°C
 - 鉄・鋼： 11×10^{-6} ，アルミ： 23×10^{-6} ，ダイヤモンド： 1×10^{-6} ，ポリエチレン： 150×10^{-6}
 - 低熱膨張材料：測定器にも使われつつある
 - **ゼロデュア**（ガラスセラミックス，ショット）： $< 0.007 \times 10^{-6}$
 - **ネクセラ**（セラミックス，黒崎播磨）： $< 0.03 \times 10^{-6}$
- 熱膨張の大きさ：1 mの材料が 1°C 変化した場合
 - 鉄・鋼： $11\text{ }\mu\text{m}$ ，アルミ： $23\text{ }\mu\text{m}$ ，ダイヤモンド： $1\text{ }\mu\text{m}$ ，ポリエチレン： $150\text{ }\mu\text{m}$
 - ゼロデュア： $< 0.007\text{ }\mu\text{m}$ (7 nm)，ネクセラ： $< 0.03\text{ }\mu\text{m}$ (30 nm)



ゼロデュア製ミラー



ネクセラ製ミラー

ショットホームページ：
<https://www.directindustry.com/ja/prod/schott-glas/product-22716-1172917.html>
黒崎播磨ホームページ：<https://krosaki-fc.com/ceramics/mirror.html>



メモ：近似式

- 分母を分子に移動するための近似的な計算
 - x が小さい場合，かなり広い範囲で成り立つ（下の表を参照）
 - 式が線形化するので，式を解く場合，微分する場合などではとても便利

$$|x| \ll 1$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1-x}{(1+x)(1-x)} = \frac{1-x}{1-x^2} \approx 1-x$$

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1+x}{(1-x)(1+x)} = \frac{1+x}{1-x^2} \approx 1+x$$

x	$1 / (1 + x)$	$1 - x$
0.0001	0.999900010	0.9999
0.001	0.999000999	0.999
0.01	0.990099010	0.99
0.1	0.909090909	0.9



長さ測定における不確かさ（まとめ）

- よい環境できちんと測定すれば，測定機器の精度および校正（校正に使った標準）が一番問題となる
- 高精度の測定の場合は，温度などの要因が大きくなる
 - 温度環境の変動（変動幅から温度の不確かさを求める）
 - 温度補正を行う場合は，温度測定の不確かさと熱膨張係数の不確かさ（かなり大きい）から温度補正の不確かさを求める
 - 長さ測定の標準温度は20 °Cである
 - 比較測定の場合，温度差と熱膨張係数差が重要となる例については，検討中



測定不確かさのまとめ

- 測定不確かさ
 - 測定における重要な概念：測定の不確かさがなければ，測定値に意味はない
 - トレーサビリティの条件
- 測定不確かさの見積
 - GUMに基づく
 - 厳密な見積は難しい
 - 実用的には，大きな要因を評価する：要因として，繰り返し，測定機器，環境は不可欠
- トレーサビリティ，測定不確かさを理解し，実際の測定に適用することが精密測定を実際に利用する場合の最も重要な条件となる
- 測定不確かさと合否の判定については，別に説明を行う予定

